

Cours 12 (Exercices)

Localisation A : anneau comm. unitaire
 $S \subset A$ système multiplicatif
($0 \notin S$).
 $\nwarrow$ sinon $S^\perp A = 0$

Question Est-ce qu'on met 1 dans S ?
(on on met $A^\times$ dans S)?

Lemme $S \subset A$ système mult.

$S' :=$ le système mult. engendré
par S et $A^\times$

Alors on a un isom. canonique
 $\varphi: S^\perp A \xrightarrow{\cong} S'^\perp A$
 $\frac{a}{s} \mapsto \frac{a}{s}$

Preuve - φ est bien-défini

- φ est un morphisme d'ann.
- φ est injectif :

$$\left(\begin{array}{l} \text{Si } \frac{a}{s} = 0 \text{ dans } S'^{-1}A, \text{ alors} \\ \exists s' \in S' \text{ tq } s'a = 0 \in A \\ \text{on écrit } s' = s'' \cdot u \text{ avec } s'' \in S, u \in A^\times \\ \Rightarrow s'' \cdot u \cdot a = 0 \Rightarrow s'' \cdot a = 0 \\ \Rightarrow \frac{a}{s} = 0 \text{ dans } S'^{-1}A \end{array} \right)$$

- φ est surjectif avec $s'' \in S'$.

Soit $\frac{a}{s'} \in S'^{-1}A$ quitte à : $\frac{a}{s'} = \frac{as''}{s's''}$

on peut toujours écrire $s' = su$ avec $s \in S, u \in A^\times$

$$\Rightarrow \frac{a}{s'} = \frac{a}{su} = \frac{u^{-1}a}{s} \in \text{Im}(\varphi) \quad \square$$

Conséquence : on peut toujours supposer
que $A^\times \subset S$

$$\varphi: A \longrightarrow S^{-1}A \\ a \longmapsto \frac{a}{1}$$

Prop $S \subset A$ système mult.

On a une bijection entre

$$\{ \text{idéaux de } S^{-1}A \} \xleftrightarrow[\sim]{\text{bij}} \{ \text{idéaux } S\text{-saturés de } A \text{ qui ne rencontrent pas } S \}$$

(Un idéal $I \triangleleft A$ est S-saturé si
 $I = \{ a \in A \mid \exists s \in S, sa \in I \} =: I^{S\text{-sat.}}$)

Preuve : (Exo)

$$J \triangleleft S^1 A \longrightarrow \varphi^{-1}(J) =: \{ a \in A \mid \frac{a}{1} \in J \}$$

$$\left\{ \frac{i}{s} \mid i \in I, s \in S \right\} : S^1 I \longleftarrow I$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Ex: } A = \mathbb{Z}, \quad S = \{1, 3, 3^2, \dots\} \\ I = (6), \quad I^{S\text{-sat}} = (2) \end{array} \right]$$

Exo : Un idéal premier $\mathfrak{p}$ de A
 avec $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$
 est toujours S-saturé.

Conséquence : bijection

$$\{\text{ideaux premiers de } S^1A\} \xleftrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{l} \text{ideaux premiers} \\ \text{de } A \text{ avec} \\ \text{intersection vide} \\ \text{avec } S \end{array} \right\}$$

$$\parallel$$

$$\text{Spec}(S^1A) \xleftrightarrow{\sim} \{ \mathfrak{p} \in \text{Spa}(A) \mid \mathfrak{p} \cap S = \emptyset \}$$

Ex 120

$$\forall m \in \mathbb{N}^*$$

$$(f * g)(m) := \sum_{\substack{x, y \in \mathbb{N}^* \\ x \cdot y = m}} f(x)g(y)$$